Transformasi Laplace dalam Mekatronika

Oleh: Purwadi Raharjo

Apakah transformasi Laplace itu dan apa perlunya mempelajarinya?

Acapkali pertanyaan ini muncul dari seorang pemula, apalagi begitu mendengar namanya yang berbau asing. Mirip seseorang yang baru mendengar nama rumus Pythagoras, namanya saja sulit diucapkan apalagi isinya, begitu pikirnya. Padahal setelah dipelajari, tidak sesulit dari yang dibayangkan. Metoda matematika temuan seorang ahli matematika dan astronomi Perancis bernama Pierre-Simon Laplace di tahun 1785 ini sebenarnya cukup penting, diantaranya dalam bidang teknik kendali, karena sangat berguna untuk menyederhanakan perhitungan-perhitungan.

Kita semua pasti telah mengetahui bahwa operasi perkalian atau pembagian suatu persamaan matematik bisa sederhana menjadi operasi penjumlahan atau pengurangan, jika dikenakan fungsi logaritma pada persamaan tersebut. Misalkan untuk menghitung 10^5x10^7, jika dikenakan operasi logaritma, maka akan menjadi persamaan $\log(10^5 \times 10^7) = 5 + 7$. Ruas kanan nampak lebih mudah dihitung dengan kalkulator karena hanya proses penjumlahan saja, bukan? Setelah melakukan proses penjumlahan ini, lalu kita bisa tahu jawaban perkalian 10^5x10^7 , yaitu dengan melakukan proses kebalikan dari fungsi logaritma tadi.

Seperti di atas, dengan proses transformasi Laplace, kitapun bisa menyederhanakan perhitungan suatu persamaan matematika yang mengandung operasi turunan/diferensial atau integral menjadi persamaan yang berisi perkalian atau pembagian biasa. Persamaan kalkulus yang rumit tersebut bisa diubah (ditransformasikan) menjadi persamaan aljabar biasa. Inilah salah satu letak keunggulan transformasi Laplace.

Tranformasi Laplace dari suatu fungsi f(t), yang ditulis dengan notasi $L(f(t))$, terdefinisikan sebagai berikut:

$$F(s) = L(f(t)) \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^T e^{-st} f(t)dt$$

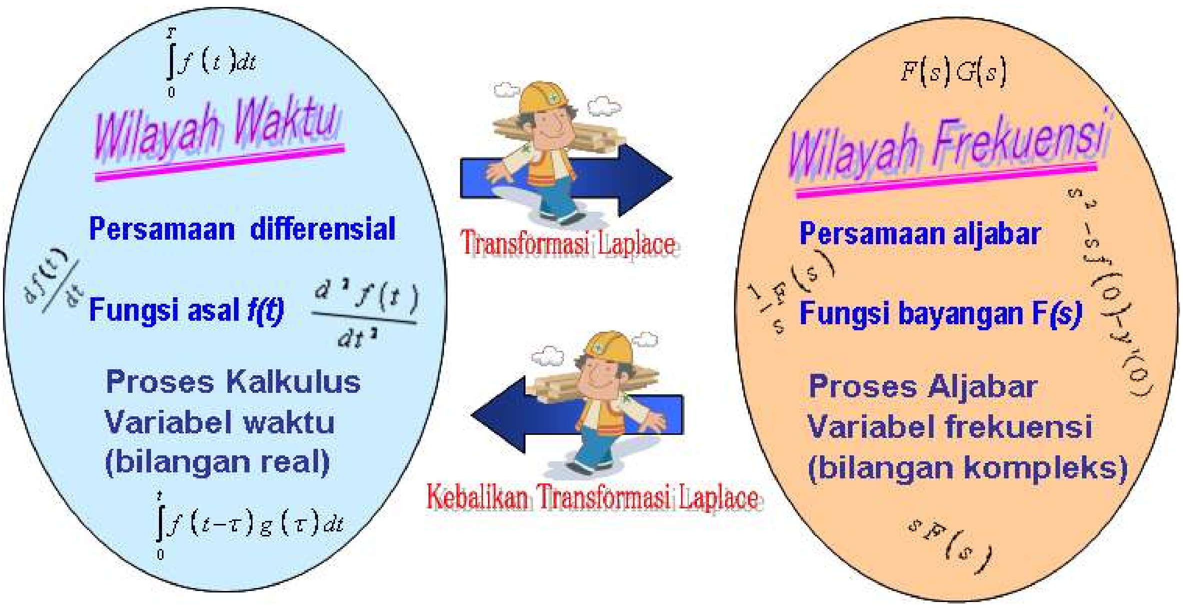
dengan s adalah bilangan kompleks.

Biasanya untuk beberapa fungsi f(t), sudah ada orang yang pernah menghitung fungsi padanannya, sehingga kita tidak perlu susah-susah lagi untuk melakukan pengintegralan dari definisi di atas. Fungsi hasil tranformasi ini, yaitu F(s), dinamakan fungsi bayangan dari fungsi asal f(t). Di dalam teknik kendali/elektronika, seringkali varibel t dari fungsi asal ini adalah variabel waktu (time-domain), dan s dari fungsi bayangan adalah frekuensi (frequency-domain).

Tabel di bawah ini adalah beberapa fungsi bayangan dari fungsi asal setelah proses transformasi Laplace yang dihitung dari definisi di atas.

Tabel 1. Fungsi asal padanan fungsi bayangannya

Fungsi asal, f(t)	**Fungsi bayangan, F(s)**
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad , \quad (a>0)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f'(t)$	$s\,F(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-f(0)s-f''(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-f(0)s^{n-1}-f'(0)s^{n-2}-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^\tau f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
$t\,F(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$(f*g)(t)$	$F(s)G(s)$



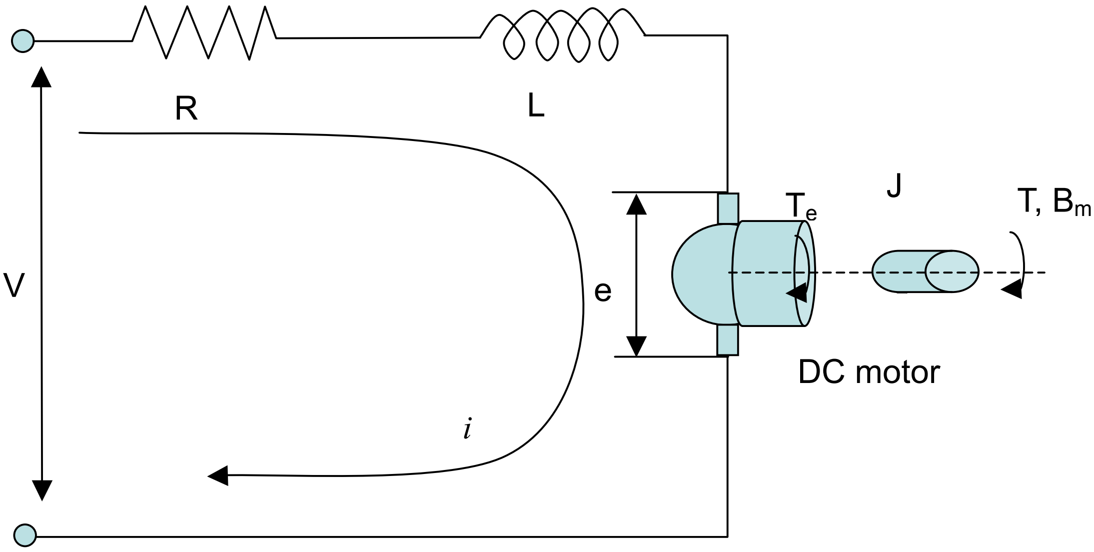
Gb. 1 Transformasi dari wilayah waktu ke wilayah frekuensi dengan transformasi Laplace.

Model Sistem Kendali Motor DC dengan Transformasi Laplace

Sekarang mari kita melihat satu contoh penerapan transformasi Laplace dalam mekatronika.

Gb. 2 Beberapa contoh motor DC

Ketika tegangan listrik disalurkan pada suatu motor DC, maka pada prinsipnya sistem yang terbentuk dapat digambarkan seperti Gb. 3 berikut.



Gb.3 Sistem rangkaian ekuivalen motor DC

Jika dialiri arus listrik yang tinggi, akan semakin kuat tenaga putar motor DC tersebut.

Sebaliknya, seperti dalam *tape recorder*, jika baterai sudah lemah, maka suara kaset menjadi tidak karuan, karena motor di dalamnya sudah tidak kuat lagi memutar pita kaset. Maka, bisa dikatakan bahwa torsi (*torque*/tenaga putar) yang dihasilkan berbanding lurus dengan besar arus listrik yang dialirkan pada motor. Pada mobil mainan yang memakai baterai misalnya, semakin besar torsinya, semakin sulit lajunya dihentikan dengan tangan kita. Jika T_e ialah torsi, dan i adalah arus listrik, maka hubungannya menjadi seperti berikut:

$$T_e = K_m\, i \qquad (1)$$

di mana K_m ialah suatu konstanta torsi.

Selanjutnya, e dalam Gb. 3 di atas adalah tegangan balik (*electromotive force*) yang terjadi karena kumparan dalam motor berputar di dalam medan magnet (prinsip generator listrik). Besar tegangan ini berbanding lurus dengan kecepatan putaran ω. Seperti yang terjadi di dalam dinamo sepeda atau kincir angin, semakin cepat putarannya maka semakin besar nyala lampunya karena tinggi tegangan yang dihasilkan. Maka, hubungannya bisa dinyatakan sebagai berikut:

$$e = K_e\,\omega \qquad (2)$$

di mana Ke adalah suatu konstanta.

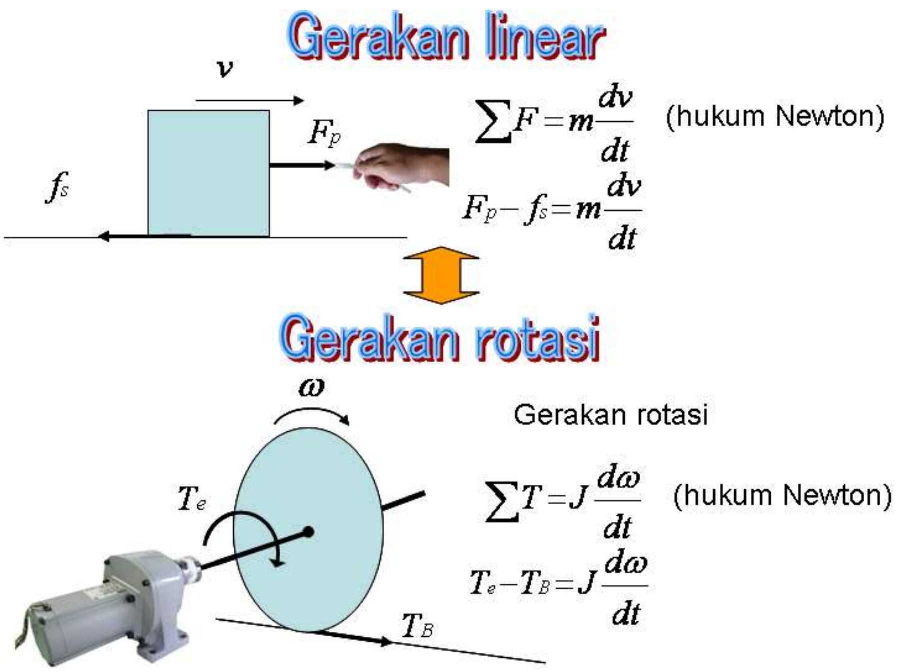
Jika suatu motor dengan tahanan dan induktansi kumparan motor masing-masing R dan L, berputar tanpa beban (kelembaman J=0 dan gesekan Bm=0), maka hubungan tegangan dan arus listrik dalam rangkaian tertutup ini bisa dinyatakan sebagai

$$V - e = R\, i(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt} \qquad (3)$$

Bagaimana jika pada sumbu motor dikenakan suatu beban dan ada gesekan ?
Ketika motor diberi beban, maka kelembaman (J) pun harus diperhitungkan. Menganalogikan torsi dengan gaya pada hukum Newton, yakni suatu benda akan mendapatkan percepatan linear ketika dikenakan suatu gaya ($\Sigma F=ma$), maka suatu benda yang diberi torsi pun akan berputar dengan percepatan sudut yang berbanding lurus dengan torsi tersebut. Sehingga hubungan ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sum T = J\frac{d\omega}{dt} \qquad (4)$$

di mana J adalah inertia (kelembaman).



Gb. 4 Rumus hukum Newton untuk gerakan rotasi dianalogikan dengan gerakan linear

Apabila terjadi gesekan ketika motor berputar, maka perlu diperhitungkan juga pengurangan torsi akibat gesekan ini, yang besarnya sebanding dengan kecepatan putaran ω dan koefisien gesekan B_m.

$$T_B = B_m \omega \qquad (5)$$

Dengan demikian total torsi yang menyebabkan perubahan kecepatan putaran adalah

$$\sum T = T_e - T_B = J\frac{d\omega}{dt} \qquad (6)$$

Dengan memasukkan persamaan (1) dan (5) ke dalam persamaan (8) maka diperoleh

$$\begin{aligned} K_m i - B_m \omega &= J\frac{d\omega}{dt} \\ i &= \frac{J}{K_m}\frac{d\omega}{dt} + \frac{B_m}{K_m}\omega \end{aligned} \qquad (7)$$

Oleh karena $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$, dan $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ sedangkan transformasi Laplacenya masing-masing dinyatakan sebagai $s\,\theta(s)$ dan $s^2\,\theta(s)$, maka persamaan (7) di atas setelah dilakukan transformasi Laplace menjadi

$$I(s) = \frac{J}{K_m}s^2\,\theta(s) + \frac{B_m}{K_m}s\,\theta(s) \qquad (8)$$

Sementara itu, dari persamaan (3), tegangan listrik motor menjadi

$$\begin{aligned} V(t) &= R\,i(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt} + e \\ &= R\,i(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt} + K_e\,\omega \end{aligned} \tag{9}$$

Jika dikenakan transformasi Laplace pada persamaan (9) ini, maka kita peroleh:

$$\begin{aligned} V(s) &= R\,I(s) + s\,L\,I(s) + s\,K_e\,\theta(s) \\ &= (sL+R)\,I(s) + sK_e\,\theta(s) \end{aligned} \tag{10}$$

Selanjutnya, dengan memasukkan persamaan (8) pada (10), bisa didapat

$$\begin{aligned} V(s) &= (sL+R)\left[\frac{J}{K_m}s^2\,\theta(s) + \frac{B_m}{K_m}s\,\theta(s)\right] + sK_e\,\theta(s) \\ &= \frac{LJ}{K_m}s^3\,\theta(s) + \frac{LB_m}{K_m}s^2\,\theta(s) + \frac{RJ}{K_m}s^2\,\theta(s) + \frac{RB_m}{K_m}s\,\theta(s) + sK_e\,\theta(s) \\ &= \frac{LJ}{K_m}s^3\,\theta(s) + \left(\frac{LB_m+RJ}{K_m}\right)s^2\,\theta(s) + \left(\frac{RB_m+K_mK_e}{K_m}\right)s\,\theta(s) \end{aligned} \tag{11}$$

Nampaklah di sini, persamaan-persamaan differensial di atas berubah menjadi persamaan dengan proses aritmatika biasa, yang menunjukkan hubungan antara tegangan motor V dan besar sudut putaran θ. Hanya saja, perlu diperhatikan bahwa di sini kita tidak lagi 'bermain' di wilayah waktu *t*.

Seperti ditunjukkan persamaan (11) di atas, secara umum persamaan dalam sistem motor DC bisa direpresentasikan sebagai berikut

$$V(s) = \left(a_1\,s^3 + a_2\,s^2 + a_3\,s\right)\theta(s)$$

di mana, a_1, a_2, dan a_3 adalah bilangan-bilangan tetapan.

Bagaimana, apakah masih bingung dengan transformasi Laplace ini? Baiklah, agar tidak terlalu melelahkan karena banyaknya rumus-rumus matematika, kita potong dulu pembahasan ini sampai di sini. Yang penting dalam sessi ini ialah, bahwa kita telah melihat manfaat transformasi Laplace untuk merepresentasikan sistem pada motor DC menjadi sederhana. Pada pembahasan selajutnya, persamaan Laplace di atas akan digunakan untuk melihat kestabilan pengendalian putaran motor DC.

Referensi:

Nakagawa S., Simulasi Bipped Robot dengan MATLAB/Simulink dan design berbasis model, Cybernet System、2007, p.31-33 (in Japanese).