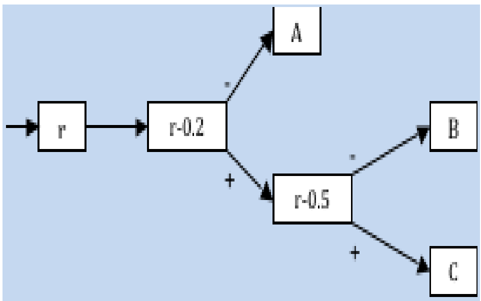
Prinsip Dasar Metoda Monte Carlo

Oleh Topan Setiadipura
Katagori : Komputasi Teknik



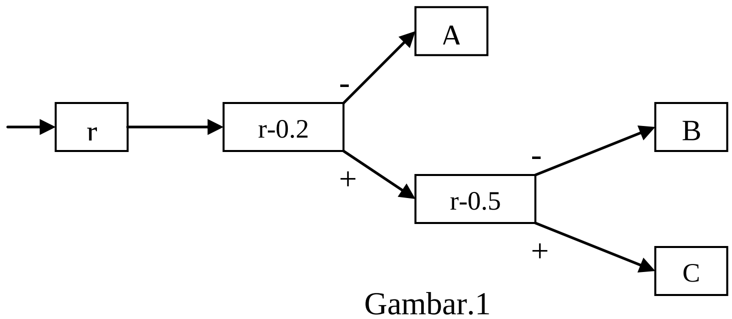
Seiring semakin berkembangnya kemampuan komputer dalam melakukan perhitungan *Metoda Monte Carlo* semakin banyak dimanfaatkan dalam berbagai aplikasi teknologi modern saat ini. Konsep metoda ini sebenarnya sudah digunakan sejak abad ke-18 oleh Comte de Buffon yang mengembangkan eskperimen untuk memperoleh rasio antara diameter dan keliling lingkaran. Di awal abad ke-20 metoda ini pun digunakan untuk memecahkan persamaan Boltzmann. Namun pemakaian metoda ini semakin matang dan mendapatkan nama `*Metoda Monte Carlo*` sejak digunakan dan dikembangkan dalam Manhattan Project pada perang dunia ke-II di laboratorium Los Alamos (sekarang bernama Los Alamos National Laboratory, LANL).[1]

Tulisan ini berusaha memberikan pengenalan mengenai konsep metoda Monte Carlo dengan sedikit formula matematika terkait. Pemahaman terhadap konsep dari metoda ini akan membantu dalam pemanfaatan metoda ini di bidang-bidang lainnya, baik untuk membangun perangkat lunak sendiri maupun membantu menghindari kesalahan dalam menggunakan perangkat lunak yang sudah siap pakai.

Untuk dapat memahami metoda Monte Carlo marilah kita pahami kasus irradiasi neutron terhadap suatu bahan. Bahan ini terdiri dari tiga inti nuklir A, B, dan C dan diketahui pola probabilitas terjadinya tumbukan neutron dengan salah satu inti nuklir tersebut. Untuk inti A probabilitasnya 0.2, inti B probabilitasnya 0.3, dan inti C probabilitasnya 0.5. Maka yang menjadi masalah yang akan kita pecahkan adalah bagaimana distribusi terjadinya irradiasi dengan salah satu inti nuklir, atau lebih jelasnya misalnya bila terdapat 500 neutron berapa neutron yang menumbuk masing-masing inti nuklir. Baiklah, sebelum kita selesaikan masalah irradiasi neutron diatas mari kita fahami sifat dari pembangkitan bilangan random. Misalnya kita membangkitkan bilangan random yang terdistribusi homogen pada interval (0,1) sebanyak N, maka secara intuisi dapat kita fahami bahwa

0.2 N akan terdapat pada interval $0 \le r < 0.2$
0.3 N akan terdapat pada interval $0.2 \le r < 0.5$
0.5 N akan terdapat pada interval $0.5 \le r < 1$

dan kemungkinan terjadinya distribusi diatas akan semakin besar dengan semakin besar nilai N. Nah, sifat pembangkitan bilangan random inilah yang digunakan untuk menyelesaikan kasus irradiasi neutron diatas. Dengan membangkitkan bilangan random distribusi terjadinya tumbukan dengan salah satu inti nuklir yang telah dikeahui probabilitasnya dapat disimulasikan. Skema penyelesaian masalah diatas dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar.1

Lebih rinci, langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut ;

i. bangkitkan bilangan random r yang terdistribusi homogen pada (0,1)
ii. cek apakah $r < 0.2$
iii. bila $r < 0.2$ maka kejadian yang terpilih adalah kejadian A, yaitu neutron bertumbukan dengan inti A.
iv. bila $r>0.2$ maka cek apakah $r<0.5$
v. bila $r<0.5$ maka kejadian yang terpilih adalah kejadian B
vi. bila tidak maka yang terpilih adalah kejadian C.

Secara umum, bila E_1, E_2, …, E_n adalah n kejadian yang saling lepas, dan masing-masing memiliki probabilitas untuk terjadi sebesar p_1, p_2, …,p_n dimana $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, maka dapat ditentukan bahwa nilai bilangan random r yang memenuhi

$$p_1 + \ldots + p_{i-1} \leq r < p_1 + \ldots + p_i$$

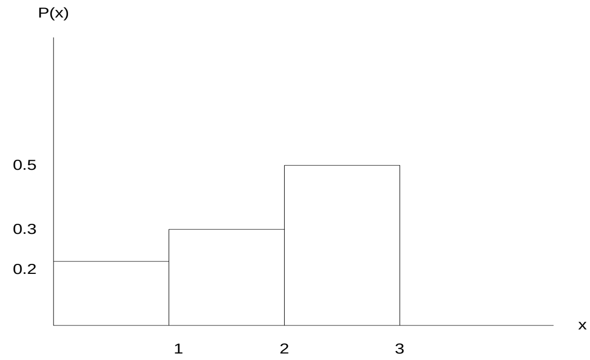
menunjukkan terjadinya kejadian E_i. Inilah prinsip dasar dari metoda Monte Carlo untuk kasus kejadian yang diskrit.

Untuk kasus kontinu. Maka sebagaimana biasa kita bagi variabel kontinu tersebut kedalam banyak partisi dan menggunanakan konsep yang sama dengan pada kasus diskrit sebagaimana akan dibahas berikut.

Misalnya kita memiliki variabel x dengan interval $0<x<n$ bagi kejadian E_1, E_2, …,E_n dengan kesepakatan bahwa nilai x yang terdapat pada interval $i-1<x< i$ menyatakan kejadian E_i . Mari kita bangun *probability density function* p(x) dengan definisi

$$p(x) = p_i \qquad i-1 \leq x < i \qquad i=1,2,\ldots n$$

p(x) menunjukkan nilai probabilitas x terletak pada interval $i-1 \leq x < i$.
Maka p(x) akan berbentuk fungsi tangga seperti gambar berikut

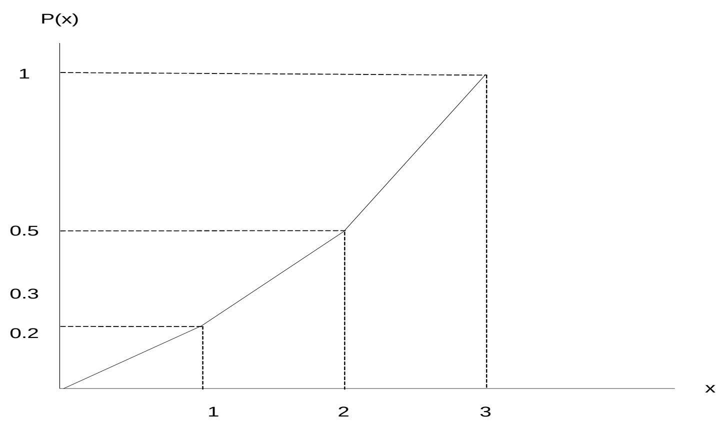


Gambar.2

Lalu, kita definisikan *probability distribution function* berikut

$$P(x) = \int_0^x p(\xi) d\xi$$

dengan grafik sebagai berikut



Gambar.3

Dimana P(0) = 0, P(n)=1, karena $P(i)=p_1+\ldots+p_i$, maka kita dapat fahami P(x) sebagai probabilitas terpenuhinya pertidaksamaan $\xi<x$, untuk x = i , i=1,…,n.

Lebih jauh, dapat dipahami dengan jelas bahwa persamaan

$$r = P(x) = \int_0^x p(\xi) d\xi$$

menentukan nilai x sebagai fungsi dari r, dan bila r terdistribusi homogen dalam interval $0 \le r < 1$, maka x akan terdapat pada interval $i-1 \le x < i$ dengan probabilitas p_i dan menunjukkan kejadian E_i. Sehingga kita dapat mensimulasikan terjadinya E_1, E_2, …,E_n dengan pembangkitan bilangan random.

Kita dapat menyatakan prinsip dasar yang dapat diaplikasikan pada kasus kontinu sebagai berikut :

Jika p(x) dx adalah probabilitas untuk x terdapat antara x dan x+dx, dalam rentang $a \le x < b$ dimana terpenuhi

$$\int_a^b p(\xi)d\xi = 1$$

maka kita dapat membangkitkan bilangan random r, dimana nilai r yang diperoleh akan digunakan pada persamaan

$$r = P(x) = \int_a^x p(\xi)d\xi$$

untuk menunjukkan nilai x secara unik sebagai fungsi dari r. Dengan r terdistribusi homogen pada $0 \le r < 1$, menjamin bahwa x akan terdapat pada interval (x, x+dx) dengan probabilitas p(x) dx sebagaimana yang dikehendaki.

Sebagai contoh, misalnya kasus neutron yang posisinya terdistribusi homogen dalam interval $a \le x < b$. Didapatkan $p(x)dx = \dfrac{dx}{(b-a)}$ artinya probabilitas posisi dalam salah satu partisi dx adalah rasio antara lebar partisi dan lebar total. Dan $\int_a^b p(\xi)d\xi = 1$ artinya x pasti terdapat dalam rentang $a \le x < b$, maka

$$r = P(x) = \int_a^x p(\xi)d\xi = \int_a^x \frac{dx}{(b-a)} = \frac{(x-a)}{(b-a)}$$

dan akhirnya kita dapat menentukan nilai x dari bilangan random r yang dibangkitkan sebagai berikut

$$x = a + r(b-a)$$

Sehingga kita dapat mensimulasikan posisi neutron sesuai dengan distribusi probabilitasnya dengan membangkitkan bilangan random, inilah prinsip dasar dari metoda Monte Carlo.

Referensi :

1. “A Monte Carlo Primer : A Practical Approach to Radiation Transport “, Stephen A. Dupree and Stanley K. Fraley, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002.